



TITLE:

# Cup products on the complete relative cohomologies of finite groups and group algebras (Cohomology of Finite Groups and Related Topics)

AUTHOR(S):

眞田, 克典

---

CITATION:

眞田, 克典. Cup products on the complete relative cohomologies of finite groups and group algebras (Cohomology of Finite Groups and Related Topics). 数理解析研究所講究録 1998, 1057: 67-71

ISSUE DATE:

1998-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/62314>

RIGHT:

# Cup products on the complete relative cohomologies of finite groups and group algebras

眞田 克典 (Sanada, Katsunori)

東京理科大学理学部数学教室

## 1 序論

有限群のコホモロジー論において、最も完成された理論の一つとして「周期性」の理論があります。これを Frobenius algebra あるいは Frobenius extension の（相対的）コホモロジー論の場合に拡張することを目標としています。まず背景として、有限群の場合を概観し、次章以降で拡張への試みを記します。

$G$  を有限群としたとき、Tate cohomology  $\hat{H}^n(G, M)$  が周期  $d$  ( $\geq 1, d \in \mathbb{Z}$ ) をもつというのは、加群としての同型  $\hat{H}^n(G, M) \cong \hat{H}^{n+d}(G, M)$  が、任意の整数  $n$  と任意の  $G$ -加群  $M$  に対して成り立っていることをいう。そして、周期を持つためには、 $G$  のすべての abelian subgroup が巡回群であることが必要十分であることが知られている (Artin-Tate)。この理論を Cartan, Eilenberg [C-E] の方法に沿って見ていく際のポイントを記すと次のようになる：

1. **Tate cohomology (complete cohomology).** すべての次元で定義されたコホモロジーを用いる。ホモロジーも負の次元のコホモロジーとして取り込まれている： $\hat{H}^n(G, M) \cong \hat{H}^{-n-1}(G, M)$  for any  $n \in \mathbb{Z}$ .
2. **Cup product.**  $\cup : \hat{H}^n(G, M) \otimes \hat{H}^m(G, N) \rightarrow \hat{H}^{n+m}(G, M \otimes N)$  を定義する。これから、cohomology ring  $\hat{H}^*(G, \mathbb{Z}) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \hat{H}^n(G, \mathbb{Z})$  が定義される。
3. **Duality Theorem.** 同型

$$\gamma_{n,-n} : \hat{H}^n(G, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(\hat{H}^{-n}(G, \mathbb{Z}), \hat{H}^0(G, \mathbb{Z}))$$

が  $\gamma_{n,-n}(\alpha)(\beta) = \alpha \cup \beta$  によって与えられる。この証明には二つの方法が知られており、一つは dimension-shifting を用いて 0 ないし -1 次元での同型に帰着させる方法 ([C-E])。もう一つは、コホモロジーとホモロジーの間のある種の同型及び cap product を用いる方法である (Brown [Br])。

4. **周期性定理 (Artin-Tate).**  $\alpha \in \hat{H}^n(G, \mathbb{Z})$  に対し次は同値：
  1. There exists  $\beta \in \hat{H}^{-n}(G, \mathbb{Z})$  such that  $\alpha \cup \beta = 1$ . (i.e.  $\alpha$  is an invertible element in  $\hat{H}^*(G, \mathbb{Z})$ )
  2.  $\alpha \cup - : \hat{H}^m(G, M) \rightarrow \hat{H}^{n+m}(G, M)$  is an isomorphism for any integer  $m$  and any  $G$ -module  $M$ .
  3.  $\alpha \cup - : \hat{H}^0(G, \mathbb{Z}) \rightarrow \hat{H}^n(G, \mathbb{Z})$  is an isomorphism.
  4.  $\text{ord } \alpha = |G|$  ( $\alpha$  is a maximal generator)

ここで、 $4 \Rightarrow 1$  のために上記 Duality Theorem が用いられる。

5. 周期を持つ  $G$  は ...  $\hat{H}^n(G, M)$  が周期的であるためには、「 $G$  のすべての abelian subgroup が巡回群であること」が必要十分である。また、「 $G$  のすべての Sylow subgroup が巡回群または一般四元数群であること」も同値な条件である。

なお、巡回群及び一般四元数群については、実際に周期 2 の complete resolution を作ることで、そのコホモロジーが周期 2 であることがわかる。

## 2 Frobenius Algebra

前節での流れに順じて、finitely generated free Frobenius  $R$ -algebra  $A$  (左  $A$ -加群としての同型  $A \cong \text{Hom}_R(A, R)$  が存在するもの) の場合に拡張を試みると以下ようになる。

より一般に Frobenius extension の場合は後に記します。

1. **Complete cohomology.** 1957 年、Nakayama [Na] によって complete cohomology  $\hat{H}^n(A, A)$  for  $n \in \mathbb{Z}$  が定義された。これは Hochschild [H] あるいは [C-E] による cohomology  $H^n(A, A)$  for  $n \geq 0$  のある種の一般化である。すなわち、 $\hat{H}^n(A, A) = H^n(A, A)$  for  $n \geq 1$ ,  $\hat{H}^0(A, A) = A^A/N_A(A)$  が成り立っている。

この場合、complete homology  $\hat{H}_n(A, A)$  も同様に定義されるが、有限群のコホモロジーの場合とは異なり、Nakayama automorphism  $\Delta$  を用いて少し modify した homology との同型が知られています;  $\hat{H}^n(A, A) \cong \hat{H}_{-n-1}^\Delta(A, A)$  for any  $n \in \mathbb{Z}$ .

2. **Cup product.**  $\cup : \hat{H}^n(A, A) \otimes \hat{H}^m(A, B) \rightarrow \hat{H}^{n+m}(A, A \otimes_A B)$  が定義される (1992, Sanada [S1, S2])。したがって、cohomology ring  $\hat{H}^*(A, A) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \hat{H}^n(A, A)$  も定義される。同時に、 $A$  の Frobenius extension  $\Gamma$  に関して、restriction map  $\text{Res} : \hat{H}^n(\Gamma, A) \rightarrow \hat{H}^n(A, A)$  及び corestriction map  $\text{Cor} : \hat{H}^n(A, A) \rightarrow \hat{H}^n(\Gamma, A)$  等が定義できる。

3. **Duality.**  $\gamma_{n,-n}(\alpha)(\beta) = \alpha \cup \beta$  によって与えられる写像

$$\gamma_{n,-n} : \hat{H}^n(A, A) \rightarrow \text{Hom}_{ZA}(\hat{H}^{-n}(A, A), \hat{H}^0(A, A))$$

が同型になるかどうかは不明。ここで、 $ZA$  は  $A$  の中心。ただ、特殊な case:  $A$  が complete local field 上の commutative separable algebra の maximal  $R$ -order (f. g. free) の場合には同型となる。

4. **周期について.**  $\alpha \in \hat{H}^n(A, A)$  に対し  $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$  が成り立つ。3  $\Rightarrow$  1 については、“Duality Theorem” が成立すれば、当然ながら正しい。

1. There exists  $\beta \in \hat{H}^{-n}(A, A)$  such that  $\alpha \cup \beta = 1$ . (i.e.  $\alpha$  is an invertible element in  $\hat{H}^*(A, A)$ )
2.  $\alpha \cup - : \hat{H}^m(A, A) \rightarrow \hat{H}^{n+m}(A, A)$  is an isomorphism of  $ZA$ -modules for any integer  $m$  and any two-sided  $A$ -module  $A$ .
3.  $\alpha \cup - : \hat{H}^0(A, A) \rightarrow \hat{H}^n(A, A)$  is an isomorphism of  $ZA$ -modules.

5. 周期を持つ  $A$  は ... 例えば、次のようなものが知られている。

1. 代数体の整数環、central simple algebra の maximal order は周期 2 のコホモロジーをもつ; 実際、complete local case に帰着させて、周期 2 の complete resolution を作ることによる (1968, Bobovich, Faddeev [Bo-F]; 1992, Larsen [L1, L2])。この場合、degree 2 の invertible element を見つけることもできる。
2. complete local case における central simple algebra の minimal hereditary order は周期 2 のコホモロジーをもつ; 実際に、degree 2 の invertible element を見つけることによる (1995, Sanada [S4])。

一方、周期をもたないものとしては、例えば整数環  $\mathbb{Z}$  上の quaternion algebra がある (1993, Sanada [S3])。

ところで、 $\Lambda$  として群環  $\mathbb{Z}G$  をとると、同型  $\hat{H}^n(\mathbb{Z}G, A) \cong \hat{H}^n(G, {}_{\psi}A)$  が成り立つことから、有限群のコホモロジーの場合に帰着される。ここで、両側  $\Lambda$ -加群  $A$  に対し、 ${}_{\psi}A$  は  $G$ -conjugation によって作用する  $G$ -加群を表す。

**定理** (1997, Nozawa, Sanada [No-S]) 上記同型  $\hat{H}^n(\mathbb{Z}G, A) \cong \hat{H}^n(G, {}_{\psi}A)$  は cup product を保存する。よって、環同型  $\hat{H}^*(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G) \cong \hat{H}^*(G, {}_{\psi}\mathbb{Z}G)$  が存在する。

**系** 群環の cohomology ring  $\hat{H}^*(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G)$  が degree  $n$  の invertible element を持つことと、群の cohomology ring  $\hat{H}^*(G, \mathbb{Z})$  が degree  $n$  の invertible element を持つこと (よって、群のコホモロジーが周期  $n$  をもつこと) とは同値である。

### 3 Frobenius Extension

$\Gamma, \Lambda$  を  $R$  上有限生成射影的多元環とする。環の拡大  $\Gamma/\Lambda$  を Frobenius extension とする、すなわち、 $\Gamma$  は  $\Lambda$  上加群として有限生成射影的であり、左  $\Gamma$ -, 右  $\Lambda$ -加群としての同型  $\Gamma \cong \text{Hom}_{\Lambda}(\Gamma, \Lambda)$  が存在するとする。Onodera [O] 等により、 $\Gamma$  の complete relative  $(\Gamma \otimes_R \Gamma^{\text{opp}}, \Lambda \otimes_R \Lambda^{\text{opp}})$ -projective resolution  $X_{\Gamma/\Lambda}$  の存在が知られている。前節までと同様に各項目ごとに記すと、

1. **Complete relative cohomology.** 上の  $X_{\Gamma/\Lambda}$  を用いて、両側  $\Gamma$ -加群  $A$  に対して、complete relative cohomology  $\hat{H}^n(\Gamma, \Lambda, A)$  for  $n \in \mathbb{Z}$  が定義される (1993, Nozawa [No1])。特に、 $\Lambda = R$  とすれば前述の  $\hat{H}^n(\Gamma, A)$  に一致する。

また、同時に定義される complete relative homology との間に同型が存在するかどうかについては、[No2] で議論されている。

有限群の complete relative (co)homology に関しては、一般には同型  $\hat{H}^n(G, H, M) \cong \hat{H}_{-n-1}(G, H, M)$  は成り立たないことが知られている ([H] 参照)。

2. **Cup product.**  $\cup : \hat{H}^n(\Gamma, \Lambda, A) \otimes \hat{H}^m(\Gamma, \Lambda, B) \rightarrow \hat{H}^{n+m}(\Gamma, \Lambda, A \otimes_{\Gamma} B)$  が定義される ([No1, No2])。したがって、relative cohomology ring

$$\hat{H}^*(\Gamma, \Lambda, \Gamma) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \hat{H}^n(\Gamma, \Lambda, \Gamma)$$

も定義される。

3. **Duality.** 上述した cohomology と homology の間の同型の存在が、“Duality Theorem” の成立に関わっていることが、わかりつつあるようです。

4. 周期について. 前章と同様です。

5. 周期を持つ  $A$  は ... . 今後の課題です。

特に、有限群  $G$  とその部分群  $H$  に対して、 $\Gamma = \mathbb{Z}G$ ,  $\Lambda = \mathbb{Z}H$  とおくと、同型  $\hat{H}^n(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}H, A) \cong \hat{H}^n(G, H, {}_{\psi}A)$  が存在するので、この場合は、Adamson [A] あるいは Hochschild [H] による群の relative cohomology に帰着される。そして、この場合も次が成り立つ：

**定理** (1997, Nozawa, Sanada [No-S]) 上記同型  $\hat{H}^n(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}H, A) \cong \hat{H}^n(G, H, {}_{\psi}A)$  は cup product を保存する。よって環同型  $\hat{H}^*(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}H, \mathbb{Z}G) \cong \hat{H}^*(G, H, {}_{\psi}\mathbb{Z}G)$  が存在する。

**系** 群環の relative cohomology ring  $\hat{H}^*(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}H, \mathbb{Z}G)$  が degree  $n$  の invertible element を持つことと、群の relative cohomology ring  $\hat{H}^*(G, H, \mathbb{Z})$  が degree  $n$  の invertible element を持つことは同値である。

## 参考文献

- [A] I. T. Adamson, Cohomology theory for non-normal subgroups and non-normal fields, *Proc. Glasgow Math. Assoc.* **2** (1954), 66–76
- [Bo] F. R. Bobovich, Cohomologies of maximal orders of simple central algebras, *Math. Notes* **6** (1969), 589–592
- [Bo-F] F. R. Bobovich and D. K. Faddeev, Hochschild cohomologies for  $\mathbb{Z}$ -rings with a power basis, *Math. Notes* **4** (1968), 575–581
- [Br] K. S. Brown, “Cohomology of Groups”, *Springer, Berlin* (1982)
- [C-E] H. Cartan and S. Eilenberg, “Homological Algebra”, *Princeton University Press, Princeton, NJ* (1956)
- [L1] M. Larsen, Homology of maximal orders in central simple algebras, *Comm. Math. Helv.* **67** (1992), 613–634
- [L2] M. Larsen, Filtrations, mixed complexes, and cyclic homology in mixed characteristic, *K-Theory* **9** (1995), 173–198
- [Na] T. Nakayama, On the complete cohomology theory of Frobenius algebras, *Osaka Math. J.* **9** (1957), 165–187
- [No1] T. Nozawa, On the complete relative cohomology of Frobenius extensions, *Tsukuba J. Math.* **17** (1993), 99–113
- [No2] T. Nozawa, On the complete relative homology and cohomology of Frobenius extensions, *Tsukuba J. Math.* **19** (1995), 57–78
- [No3] T. Nozawa, On the periodicity of the complete cohomology of Frobenius extensions, preprint

- [No-S] T. Nozawa and K. Sanada, Cup products on the complete relative cohomologies of finite groups and group algebras, preprint (1997)
- [O] T. Onodera, Some studies on projective Frobenius extensions, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ.* **18** (1964), 89–107
- [S1] K. Sanada, On the cohomology of Frobenius algebras, *J. Pure Appl. Algebra* **80** (1992), 65–88
- [S2] K. Sanada, On the cohomology of Frobenius algebras II, *J. Pure Appl. Algebra* **80** (1992), 89–106
- [S3] K. Sanada, On the Hochschild cohomology of crossed products, *Comm. Algebra* **21** (1993), 2727–2748
- [S4] K. Sanada, Hochschild cohomology of minimal hereditary orders, *J. Algebra* **176** (1995), 786–805

162-0827 東京都新宿区若宮町 26

東京理科大学理学部数学教室

*E-mail:* sanada@rs.kagu.sut.ac.jp